Série génératrice et dualité de Koszul

[https://www.math.univ-toulouse.fr/~jmilles/]

Joan Millès

10 avril 2025

Institut de mathématiques de Toulouse

Introduction

Les séries formelles en combinatoire

1. "De combien de manières différentes peut-on payer une somme de 2025 euros avec des pièces de 1, 2 et 3 euros ?"

   ↪ développement en série formelle de $\dfrac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$ en utilisant la décomposition en éléments simples.

2. "Déterminer le nombre d'arbres binaires b_n à n feuilles."

   ↪ $S = \sum_{n\geq 1} b_n X^n$ série génératrice

   $\left(b_n = \sum_{p+q=n} b_p b_q \right. \rightsquigarrow S = X + S^2 \to S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} X^n.$

3. Opérations sur les séries formelles

   somme, produit, substitution, dérivée, ...

Les espèces pour une analyse plus fine

On ne contente plus d'étudier les cardinaux mais on étudie les ensembles directement.

1. Opérations et cardinaux :
   ↪ somme (union disjointe), produit, substition, ...
   ↪ on retrouve les cardinaux qui nous intéresse à l'aide des séries génératrices.
2. Transport de structures : à l'aides des bijections sur les ensembles. Cela nous permet de distinguer équipotence et isomorphisme [on peut comparer les problèmes de dénombrement.]
3. Espèces particulières :
   ↪ qui sont munies d'une structure de monoïde (opérade)
   ↪ on travaillera dans un contexte linéaire et même différentiel gradué (= complexes de chaînes).

$\hookrightarrow$ on présentera une théorie homologique, dualité de Koszul, qui nous donnera une formule reliant des séries génératrices.

Opérade algébrique et série génératrice exponentielle

Espèce linéaire

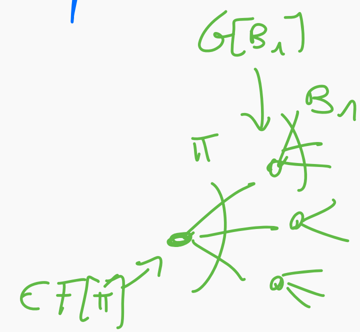
1. Linéarisation : $M : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ = ens. finis + bij.

$\rightsquigarrow \tilde{M} : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}$ + iso. lin., $A \mapsto \mathbb{k}\langle M[A] \rangle$ = esp. vect. engendré par les M-struct. sur A

Rem.: $\mathrm{Card}\, M[A] = \dim \tilde{M}[A]$

$\hookrightarrow$ Série génératrice (exp.) d'une espèce "linéaire"

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\dim \tilde{M}[n]}{n!} x^n.$$



2. Substitution :

- Si $F, G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $A \in \mathbb{B}$

$$(F \circ G)[A] := \bigsqcup_{\pi \in \mathrm{Part}[A]} F[\pi] \times \prod_{B \in \pi} G[B]$$

- si $\tilde{F}, \hat{G} : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}$, $A \in \mathbb{B}$

$$(\tilde{F} \circ \tilde{G})[A] := \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Part}[A]} \tilde{F}[\pi] \otimes_{\mathbb{k}} \bigotimes_{B \in \pi} \tilde{G}[B]$$

[Compatible avec la linéarisation]

Opérade (algébrique)

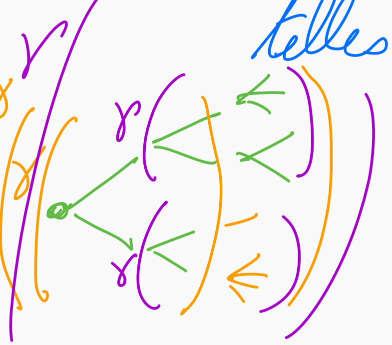
Déf.: Une opérade $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ est un monoïde dans la catégorie monoïdale $\left(\text{Espèces lin.}, \circ, I : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}\right)$

$$\{*\} \mapsto \Bbbk$$
$$A \mapsto \{0\} \text{ si } \#A \neq 1.$$

Explicitement: $\mathcal{P} : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}$

car $(\mathrm{Vect}, \otimes, \Bbbk)$ est monoïdale symétrique

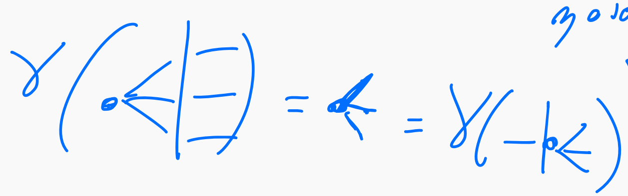
$\left.\begin{array}{l} \gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ \eta : I \to \mathcal{P} \end{array}\right\}$ transformations naturelles de foncteurs



telles que

$*$
$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) \circ \mathcal{P} \cong \mathcal{P} \circ (\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{P}} \circ \gamma"] \arrow[d, "\gamma \circ \mathrm{id}_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$
(associativité)

$*$
$$\begin{tikzcd}
I \circ \mathcal{P} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\eta \circ \mathrm{id}_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{P} \circ I \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{P}} \circ \eta"] \\
\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[ul, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$
(unité)



Exemples

1. L'espèce des ensembles $\mathbb{E}$ munie de la composition qui envoie les ensembles partitionnés sur l'ensembles de départ :

On peut linéariser

$$(\{B_1, \ldots, B_m\}; B_1, \ldots, B_m) \mapsto \{B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m\}. = \{A\}$$

$$(\mathbb{E} \circ \mathbb{E})[A] \longrightarrow \mathbb{E}[A]$$

2. L'opérade d'endomorphisme End_V d'un espace vectoriel V définie par : $End_V[A] = Hom(V^{\otimes \# A}, V)$ et la composition est la composition des ~~endomorphismes~~.

applications linéaires

Donnée quadratique et dualité de Koszul

Opérade libre

Définition : L'opérade libre $T(M)$ sur une espèce $M : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}$ est l'opérade vérifiant la propriété universelle :

$\exists\, M \to T(M)$ d'espèces, $\forall\, M \xrightarrow{\phi} P$ d'espèces avec P opérade

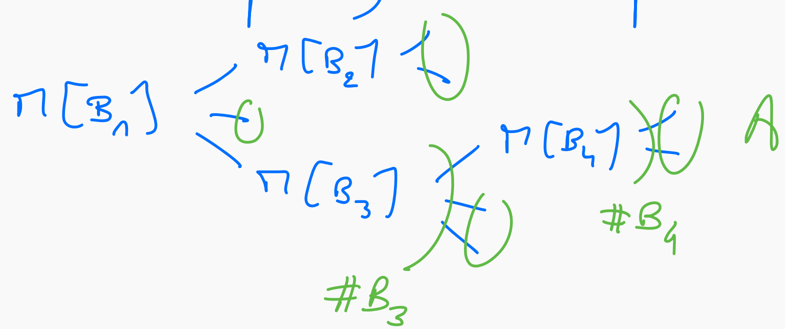
$\exists!$ morphisme d'opérades φ tq

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "G"] & P \\ T(M) \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Constructions :

- à l'aide des arbres (dans l'espace) indicés par les M-structures

$$T(M)[A] = \bigoplus_{t \text{ arbre}}$$



$\boxed{\text{ou}}$

- $T(M) = \bigcup_{n \geq 0} T_n M$ où $T_0 M = I$, $T_n M := I \oplus M \circ T_{n-1} M$

Opérade quadratique

Donnée quadratique : (E, R)

C'est la donnée d'une espèce $E : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}$ et d'une sous-espèce $R : \mathbb{B} \to \mathrm{Vect}$, $A \mapsto R[A] \subseteq \mathcal{T}(E)^{(2)}[A]$

on se limite aux arbres à 2 sommets

Opérade quadratique : $\mathcal{P}(E;R) = \mathcal{T}(E)/(R)$

idéal engendré par R

Elle vérifie la ppté universelle :

$\forall \mathcal{P}$ opérade tq

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "\text{d'esp.}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \mathcal{T}(E) \arrow[r, two heads, "\text{d'opérades}"] \arrow[d] & \mathcal{P} \\
& \mathcal{T}(E)/(R) \arrow[ur, dotted, "\exists !"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemples

1. Si $E : \mathbb{B} \to \mathit{Vect}$, $A \mapsto \begin{cases} \Bbbk\, Y \otimes \Bbbk[S_A] & \text{si } \#A = 2 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$

   et $R : \mathbb{B} \to \mathit{Vect}$, $A \mapsto \begin{cases} \Bbbk\, (Y\!Y - Y\!Y) \otimes \Bbbk[S_A] & \text{si } \#A = 3 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$

   alors $\mathcal{T}(E)/(R) = \mathcal{A}s$ l'opérade qui code les algèbres associatives.

2. Si $E : \mathbb{B} \to \mathit{Vect}$, $A \mapsto \begin{cases} \Bbbk\, Y & \text{si } \#A = 2 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$

   et $R : \mathbb{B} \to \mathit{Vect}$, $A \mapsto \begin{cases} \text{exo} \end{cases}$

   alors $\mathcal{T}(E)/(R) = (\widetilde{\mathbb{E}}, \gamma)$ la linéarisation de l'espèce des ensembles munie de la structure de monoïde vue précédemment.

   Elle est aussi appelée Com car elle code les algèbres assoc. et commutatives.

Coopérade

1. La notion de coopérade est duale à la notion d'opérade.

2. En inversant les flèches dans la propriété universelle de la notion d'opérade quadratique, on obtient la notion de coopérade coengendrée par une donnée quadratique (E, R), notée $\mathcal{C}(E; R)$.

3. Coopérade duale de Koszul : de $\mathcal{P}(E;R)$ $\big(= \mathcal{P}\big)$

est $\mathcal{C}(sE; s^2R) = \mathcal{P}^{¡}$

suspension homologique $\to$ dg Vect = complexe de chaînes.

gradués $\downarrow$ gVect

$$V_\bullet = (\dots, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \dots) = (V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$(sV)_\bullet : \quad (sV)_n = V_{n-1} \qquad (sV)_\bullet = (V_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots\{0\} & V_{-1} \arrow[l, "d_{-1}"'] \arrow[d, phantom, "\wr"] & V_0 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[ll, bend left, "0"] & V_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[ll, bend left, "0"] & \cdots \arrow[l, "d_2"'] \arrow[ll, bend left, "0"] \\ & \{0\} & & & \end{tikzcd}$$

Caractéristique d'Euler :

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \dim\left(\frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left[\dim(\ker d_n) - \dim(\operatorname{im} d_{n+1})\right]$$

$$= \dim(\ker d_0) - \dim(\operatorname{im} d_1) - \left(\dim(\ker d_1) - \dim(\operatorname{im} d_2)\right) + \cdots$$

$$= \dim V_0 - \underbrace{\dim V_1}_{= \dim(\operatorname{im} d_1) + \dim(\ker d_1)} + \dim V_2 - \cdots$$

$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dim V_n .$$

Opérade Koszul et conséquences sur les séries génératrices

Opérade Koszul

Définition : $\mathcal{P}$ est <u>Koszul</u> si $(\mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}, d_K)$ est <u>acyclique</u>

↑ une certaine différentielle

c'est-à-dire $H_\bullet(\mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}, d_K)[A] = \dfrac{\ker d_K}{\operatorname{im} d_K}[A] = \begin{cases} \mathbb{k} \text{ si } \#A = 1 \\ \{0\} \text{ sinon} \end{cases}$

Comment montrer la Koszulité ?

- $(\mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}, d_K) \xrightarrow{\sim} I$ ← acyclicité
- $\Omega \mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$
- $\mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\sim} B\mathcal{P}$
- admet une base de PBW / Gröbner
- ...
- $\mathcal{P}^{!} = (\mathcal{P}^{¡})^{*}$ est Koszul.

Séries génératrices (exponentielles)

On se limite au cas *binaire* quadratique pour simplifier.

↳ $E[A] = \{0\}$ si $\# A = 2$.

$$f^{\mathcal{P}}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\dim \mathcal{P}[n]}{n!} x^n$$

← intérêt de cette formule : elle est compatible avec les opérations : somme, produit, substitution, dérivée sur les espèces et les séries.

Théorème
Si $\mathcal{P}$ est une opérade binaire quadratique Koszul, alors

$$f^{\mathcal{P}^!}(-f^{\mathcal{P}}(x)) = x.$$

Démo : • $(\mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}, d_\kappa)[A]$ acyclique

• Caractéristique d'Euler-Poincaré

$$f^{\mathcal{P}^!}(f^{\mathcal{P}}(x,y), -y) = x$$

Exemples

1. Nous avons $As^! = As$ et

$$f^{As}(x) = \sum_{n \geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

2. Nous avons $\widetilde{\mathbb{E}}^! = Com^! = Lie$ et

$$f^{\mathbb{E}}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) - 1.$$

   On peut en déduire

$$f^{Lie}(x) = -\ln(1-x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

Conséquences

1. Certaines opérades ne sont pas Koszul :

   $$xy \rightsquigarrow (xy)z = 2x(yz)$$

2. Arbres enracinés : Perm / pre Lie

3. **Théorème** [Khoroshkin-Piontkosvski, 2015]
   Si $\mathcal{P}$ opérade avec une base de Gröbner finie ("shuffle régulière"), alors $f^{\mathcal{P}}$ est solution d'une équation différentielle-algébrique avec des cœfficients polynomiaux.